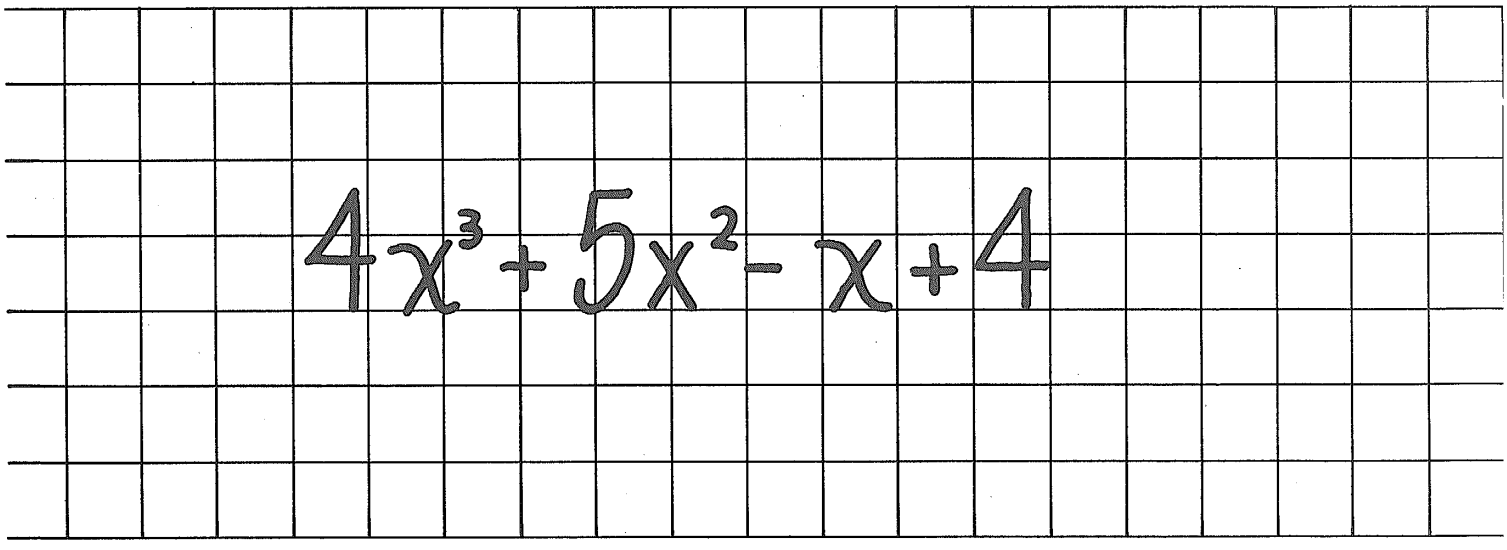
OPERACIONES CON EXPRESIONES REALES

Obras que integran el bloque 1 *(Álgebra. Estructuras y operaciones)*

1. Conjuntos
2. Estructuras matemáticas
3. El conjunto de los enteros
4. Operaciones con enteros
5. Lenguaje algebraico 1. Formación
6. Lenguaje algebraico 2. Transformación
7. Operaciones con polinomios 1. Suma, resta, multiplicación y división
8. Operaciones con polinomios 2. Productos notables
9. Operaciones con polinomios 3. Factorización
10. El conjunto de los racionales
11. Operaciones con expresiones racionales
12. El conjunto de los reales
13. ***Operaciones con expresiones reales***
14. El conjunto de los complejos. Estructura y operaciones

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 1

Álgebra. Estructuras y operaciones

Módulo 13

OPERACIONES CON EXPRESIONES REALES

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia,
España, Puerto Rico, Venezuela

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía,
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
OPERACIONES CON EXPRESIONES REALES
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1985, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, abril 1985
ISBN 968-24-1513-6

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquellos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

13.1 Operaciones con potencias y raíces 9

13.2 Radicación par e impar de los números reales 47

13.3 Exponentes en $\mathbb{Q}$ 71

13.4 Operaciones con radicales 93

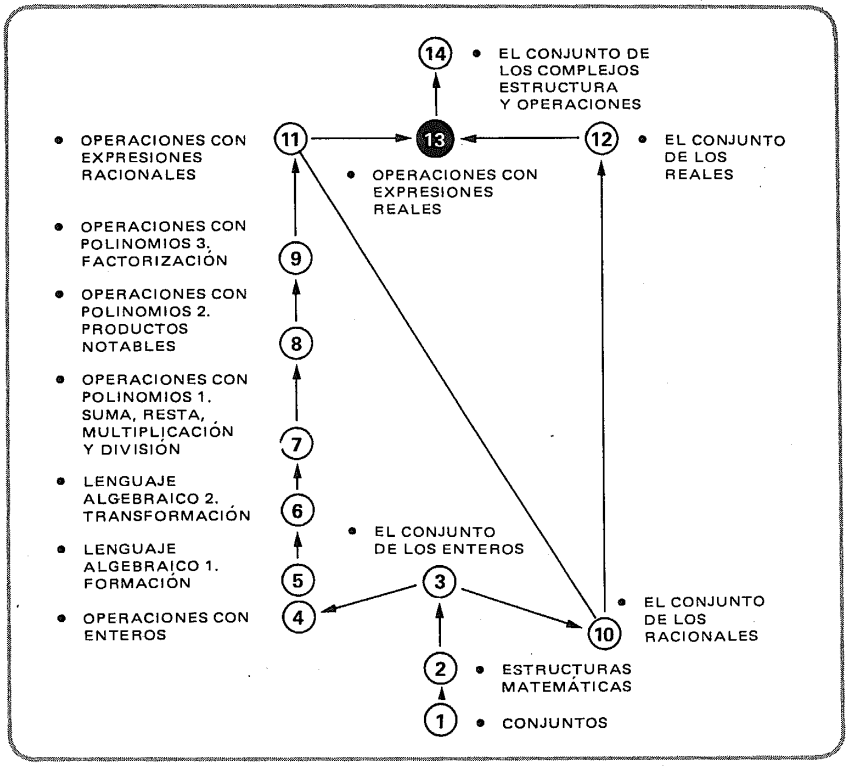
13.5 Exponentes en $\mathbb{R}$ 128

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 1. Álgebra. Estructuras y operaciones

Objetivos: establecer las estructuras matemáticas relacionadas con los números naturales, enteros, racionales, reales y complejos. Efectuar las cuatro operaciones binarias fundamentales y las operaciones monarias de potenciación y radicación con expresiones algebraicas pertenecientes a cada uno de los cinco conjuntos mencionados

Esquema estructural del bloque 1



Módulo 13. Operaciones con expresiones reales

Objetivos: efectuar operaciones de simplificación, suma, resta, multiplicación, división, potenciación o radicación con expresiones exponenciales o radicales

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Suma, resta, multiplicación y división de polinomios con coeficientes enteros	1	7
• Productos notables	1	8
• Factorización entera	1	9
• Manejo de expresiones racionales	1	11
• Concepto de número real	1	12

13.1

Operaciones con potencias y raíces

1

Recordemos que
a una expresión algebraica
de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$$

con

- $a_i \in \mathbb{Z}$, y
- exponentes $\in \mathbb{N}$

le hemos llamado

_____

polinomio
con
coeficientes **enteros**
o
polinomio en $\mathbb{Z}$

con una indeterminada

2

A una expresión de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$$

con

- $a_i \in \mathbb{Q}$, y
- exponentes $\in \mathbb{N}$

le hemos llamado

_____

polinomio
con
coeficientes **racionales**
o
polinomio en $\mathbb{Q}$

con una indeterminada

3

De manera similar,
a una expresión de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$$

con

- $a_i \in \mathbb{R}$, y
- exponentes $\in \mathbb{N}$

podemos llamarle

_____

polinomio
con
coeficientes **reales**
o
polinomio en $\mathbb{R}$

con una indeterminada

4

Sean:

$P_{\mathbb{Z}}$ el conjunto de los polinomios en $\mathbb{Z}$
$P_{\mathbb{Q}}$ el conjunto de los polinomios en $\mathbb{Q}$
$P_{\mathbb{R}}$ el conjunto de los polinomios en $\mathbb{R}$

$$P_{\mathbb{Z}} \subset P_{\mathbb{Q}} \subset P_{\mathbb{R}}$$

V/F

V

5

Este es
un ejemplo de polinomio en $\mathbb{Z}$:

$$4x^3 + 5x^2 - x + 4$$

Pero también es
un polinomio en $\mathbb{Q}$
y un polinomio en $\mathbb{R}$

6

Éste es un ejemplo
de polinomio en $\mathbb{Q}$:

$$\frac{3}{4}x^5 - 8x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{5}$$

Pero también es
un polinomio en ⌊___⌋

$\mathbb{R}$

7

Este es un ejemplo
de polinomio en $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{3}\,x^4 + \frac{3\sqrt{2}}{5}\,x^2 - \pi x + \sqrt[3]{5}$$

Pero, ¿es también un polinomio en $\mathbb{Z}$? Sí/No — No

¿es también un polinomio en $\mathbb{Q}$? Sí/No — No

8

Para efectuar operaciones de
suma, resta, multiplicación, división,
potenciación, radicación ...
con polinomios como éste

$$\sqrt{3}\,x^4 + \frac{3\sqrt{2}}{5}\,x^2 - \pi x + \sqrt[3]{5}$$

es necesario conocer las reglas para la
transformación de las expresiones
que aparecen como coeficientes.

9

Concentremos ahora nuestra
atención en una clase muy importante
de números:
las **raíces**,
cuya expresión algebraica es:

$$\sqrt[n]{a}$$

10

Para alcanzar nuestro objetivo de **transformación**
de expresiones con raíces,
empezaremos por formalizar un poco más
el estudio de las **potencias.**

11

Exponentes en $\mathbb{Z}$

12

Recordemos que:

$a^1 = a$
$a^2 = a \cdot a$
$a^3 = \underline{\quad\quad}$
$a^4 = \underline{\quad\quad\quad}$

etcétera

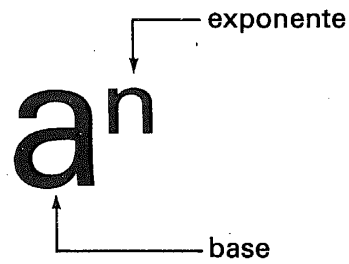
$a \cdot a \cdot a$
$a \cdot a \cdot a \cdot a$

13

A una expresión como ésta le llamamos:

potencia

o
expresión exponencial.



14

Si $a \in \mathbb{R}$
y $n \in \mathbb{Z}^+$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots a}_{\text{n factores iguales}}$$

15

En

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{\text{n factores iguales}}$$

vamos a sustituir para **a** algunos elementos del dominio: $\mathbb{R}$

Por ejemplo:

$5^2 = \square = \square$

$5 \cdot 5 = 25$

16

$2^6 = \square = \square$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$

17

$1^{10} = \square = \square$

$\overbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \ldots}^{\text{10 factores}} = 1$

18

$1^n = \square$

$n \in \mathbb{Z}^+$

1

19

$(-3)^2 = \square = \square$

☞ Observar con atención el signo del resultado cuando **n es par:**

$(-3) \cdot (-3) = 9$

20

$(-5)^3 = \square = \square$

☞ Observar con atención el signo del resultado para **n impar:**

$(-5)(-5)(-5) = -125$

21

$0^3 = \square = \square$

$0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

22

$0^n = \square = \square$

$n \in \mathbb{Z}^+$

$\overbrace{0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \ldots}^{\text{n factores}} = 0$

23

$(0.5)^2 = \square = \square$

☞ Observar con atención como $(0.5)^2 < 0.5$:

$0.5 \times 0.5 = 0.25$

24

$(0.03)^3 = \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad}$

$0.03 \times 0.03 \times 0.03 = 0.000027$

25

$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \underline{\qquad\qquad} = \underline{\quad}$

$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$

26

$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \underline{\qquad\qquad} = \underline{\quad}$

$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$

27

En general:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \square$$

$a, b \in \mathbb{Z}$
$b \neq 0$
$n \in \mathbb{Z}^+$

$$\frac{a^n}{b^n}$$

28

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$a, b \in \mathbb{Z}$
$b \neq 0$
$n \in \mathbb{Z}^+$

29

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \square$$

☞ Observar con atención el resultado:

$$\frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4}$$

30

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \square$$

$$\frac{1^3}{4^3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

1.13.1.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

31

Queremos ahora expresar en forma compacta
un producto de potencias de igual base,
por ejemplo:

$$a^3 \cdot a^2 = \overbrace{a \cdot a \cdot a}^{a^3} \cdot \overbrace{a \cdot a}^{a^2} = \square$$

a^5

32

$a^4 \cdot a^3 = \square = \square$

$\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot a} = a^7$

33

$a^5 \cdot a = \square = \square$

$\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} \cdot \overbrace{a} = a^6$

34

En general,
para $a \in \mathbb{R}$ y $n, m \in \mathbb{Z}^+$

$a^m \cdot a^n = \square$

a^{m+n}

35

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a \in \mathbb{R}$
$m, n \in \mathbb{Z}^+$

36

$x^4 \cdot x^2 = \square$

x^6

37

$m^{10} \cdot m^7 = \square$

m^{17}

38

$n^{13} \cdot n^5 = \square$

n^{18}

39

$y^{100} \cdot y^{127} = \square$

y^{227}

40

$a^9 \cdot b^7 = \square$

☞ La expresión dada **no** es un producto de potencias con la misma base.

$a^9\ b^7$

41

$n^{10} \cdot m^{20} = \square$

$n^{10} m^{20}$

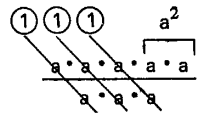
1.13.1.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

42

Ahora
necesitamos expresar en forma compacta
un cociente de potencias de la misma base.
Por ejemplo:

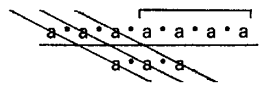
$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = \square$$



a^2

43

$$\frac{a^7}{a^3} = \square = \square$$



a^4

44

$$\frac{a^4}{a} = \square = \square$$

$\frac{a \cdot a \cdot a \cdot a}{a}$

a^3

45

En general,
para
$a \in \mathbb{R}, a \neq 0; m, n \in \mathbb{Z}^+, m > n$:

$$\frac{a^m}{a^n} = \square$$

a^{m-n}

46

Ahora bien:

$$\frac{a^3}{a^3} = \square = \square$$

$$\frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a}$$

1

47

$$\frac{a^4}{a^4} = \square = \square$$

$$\frac{a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a}$$

1

48

$$\frac{a}{a} = \square$$

1

49

Observemos con atención estos resultados:

$$\frac{a^3}{a^3} = 1$$

$$\frac{a^4}{a^4} = 1$$

$$\frac{a}{a} = 1$$

En general:

$$\frac{a^n}{a^n} = 1$$

50

$$\frac{a^n}{a^n} = 1 \qquad n \in \mathbb{Z}^+$$

¿Es verdadera esta proposición
para todos los valores de a
en el conjunto de los reales?

Sí/No

$$\frac{a^n}{a^n} = 1 \qquad n \in \mathbb{Z}^+$$

Es verdadera
para todos los valores
de a
en el conjunto
de los reales,
excepto para el 0,
ya que
$\frac{0^n}{0^n} = \frac{0}{0}$
no está definido.

51

Por otra parte,
al hacer extensiva la regla

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

al caso en que m = n, obtenemos:

$$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$$

52

Así, nos hemos dado cuenta de que:

$\frac{a^n}{a^n} = 1$

y de que:

$\frac{a^n}{a^n} = a^0$

por lo tanto, podemos concluir que

$a^0 = 1$

53

$a^0 = 1$

Conjunto de sustitutos permisibles para a:

$\mathcal{R} - \{0\}$

o

$\mathcal{R}_0$

54

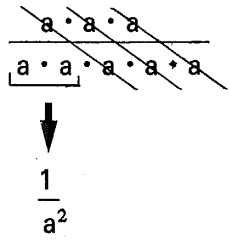
$a^0 = 1 \quad a \in \mathcal{R}$ y $a \neq 0$

Debemos aceptar la validez de esta proposición ya que ha sido inferida de otras, aceptadas como verdaderas.

55

Ahora bien:

$$\frac{a^3}{a^5} = \square = \square$$



$$\frac{1}{a^2}$$

56

Por otra parte, al hacer extensiva la regla

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

al caso en que $m < n$, obtenemos:

$$\frac{a^3}{a^5} = \square = \square$$

$$a^{3-5} = a^{-2}$$

57

Así hemos encontrado, por un lado, que

$$\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2}$$

y por otro, que

$$\frac{a^3}{a^5} = a^{-2}$$

Por lo tanto, debemos aceptar que

$$\square$$

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

58

Hemos encontrado que:

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

y, en general:

$a^{-n} =$ ____

$\frac{1}{a^n}$

59

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$\forall\, a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$

$n \in \mathbb{Z}$ (ya que hemos aceptado la existencia de exponentes negativos)

60

$a^{-2} =$ ____

$\frac{1}{a^2}$

61

$a^{-5} = \square$

$\frac{1}{a^5}$

62

$n^{-7} = \square$

$\frac{1}{n^7}$

63

$m^{-1} = \square$

$\frac{1}{m}$

64

$5^{-1} = \square$

$\frac{1}{5}$

65

$2^{-1} = \square$

$\frac{1}{2}$

66

$(-3)^{-1} = \square$

$\frac{1}{-3}$ o $-\frac{1}{3}$

67

$5^{-2} = \square$

$\frac{1}{5^2}$ o' $\frac{1}{25}$

68

Observemos con atención que:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \square$$

Como fracción simple

$\frac{4}{3}$

69

$\left(\frac{5}{2}\right)^{-1} = \square$

$\frac{2}{5}$

70

$\left(\frac{7}{8}\right)^{-1} = \square$

$\frac{8}{7}$

71

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \square$

$(2)^{-1} = \square$

2

$\frac{1}{2}$

72

Tomemos nota de estas dos formas de representar el

inverso multiplicativo de a:

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

73

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \square = \square$$

$$\frac{3^{-2}}{4^{-2}} = \frac{1}{3^2} \cdot 4^2 = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$$

74

Observemos que:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^{2}$$

y, en general: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \square$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

75

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$$

$a, b \in \mathbb{R}$
$a \neq 0$
$b \neq 0$
$n \in \mathbb{Z}$

76

Ahora bien:

$(a^3)^2 = \square = \square$

$a^3 \cdot a^3 = a^6$

77

$(a^2)^3 = \square = \square$

$a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^6$

78

$(a^3)^4 = \square = \square$

$a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = a^{12}$

79

$(a^5)^3 = \square = \square$

$a^5 \cdot a^5 \cdot a^5 = a^{15}$

80

Observemos con atención los resultados:

$(a^3)^2 = a^6$ $(3 \times 2 = 6)$

$(a^2)^3 = a^6$ $(2 \times 3 = 6)$

$(a^3)^4 = a^{12}$ $(3 \times 4 = 12)$

$(a^5)^3 = a^{15}$ $(5 \times 3 = 15)$

81

En general, podemos afirmar que:

$(a^n)^m = \square$

$a^{n \cdot m}$

82

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$a \in \mathbb{R}$
y
$n, m \in \mathbb{N}$

83

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
$a \in \mathbb{R}$ $\quad n, m \in \mathbb{N}$

El conjunto de sustitutos permisibles para n y m debe poder ser ampliado a $\mathbb{Z}$

☞ En este caso,
si $n \in \mathbb{Z}^-$
o bien $m \in \mathbb{Z}^-$
a debe ser diferente de 0.

84

Entonces:

$(a^{-3})^2 = \square$

a^{-6}

En efecto:

$(a^{-3})^2 = a^{-3} \cdot a^{-3} = a^{-6}$

85

$(n^4)^{-3} = \square$

n^{-12}

86

$(x^{-5})^{-3} = \square$

x^{15}

87

$(2^3)^{-2} = \square = \square$

$2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$

88

$$\left[(-3)^2\right]^{-3} = \square = \square$$

$$(-3)^{-6} = \frac{1}{(-3)^6} = \frac{1}{729}$$

89

$$\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} = \square = \square$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2} = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}$$

90

$$(0^{-3})^2 = \square$$

$$0^{-6} = \frac{1}{0^6} = \frac{1}{0}$$

resultado no definido

1.13.1.3

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

91

$(a \cdot b)^2 = \square = \square$

$a \cdot b \cdot a \cdot b$

$= a \cdot a \cdot b \cdot b$

$= a^2\ b^2$

92

$(xy)^3 = \square$

$x^3\ y^3$

Tomar nota de la diferencia entre $(xy)^3$ y xy^3.

93

$(3mn)^4 = \square = \square$

$3^4 m^4 n^4 = 81m^4 n^4$

94

$(-2ab^2)^3 = \square = \square$

$(-2)^3 a^3 (b^2)^3 = -8a^3 b^6$

95

$(-4a^3 b^2)^2 = \square = \square$

$(-4)^2 (a^3)^2 (b^2)^2$

$= 16a^6 b^4$

96

$(xy^2)^{-2} = \square$

$x^{-2}(y^2)^{-2}$

$= x^{-2} \cdot y^{-4}$

$= \dfrac{1}{x^2 y^4}$

97

$(3a^3 b^4)^{-3} = \square$

$3^{-3} \cdot (a^3)^{-3} \cdot (b^4)^{-3}$

$= 3^{-3} \cdot a^{-9} \cdot b^{-12}$

$= \dfrac{1}{3^3 a^9 b^{12}}$

$= \dfrac{1}{27a^9 b^{12}}$

98

En general:

$(ab)^n = \square$

$a^n b^n$

99

$(ab)^n = a^n b^n$

$a, b \in \mathbb{R}$

$n \in \mathbb{Z}$

si $n \in \mathbb{Z}^-$, $a \neq 0 > b \neq 0$

$(a^n b^m)^r =$ [ ]

$a^{nr} \cdot b^{mr}$

100

$(a^n b^m)^r = a^{nr} b^{mr}$

Para aquellos casos
en que todas las expresiones involucradas
estén definidas.

101

$(2x^{-2}y^3)^2 =$ [ ]

$2^2 \cdot x^{-4} \cdot y^6$

$= 4x^{-4} \cdot y^6$

$= \dfrac{4y^6}{x^4}$

☞ Para $x \neq 0$ ya que
x^{-2}, x^{-4} y $\dfrac{4y^6}{x^4}$ no se definen
para $x = 0$

102

$(3a^{-2}b^{-3}c^4)^3 = \square$

$3^3 \cdot a^{-6} \cdot b^{-9} \cdot c^{12}$

$= 27a^{-6}b^{-9}c^{12}$

$= \dfrac{27c^{12}}{a^6 b^9}$

Para $a \neq 0 > b \neq 0$:
$a^{-2}, b^{-3}, a^{-6}, b^{-9}$ y $\dfrac{27c^{12}}{a^6 b^9}$
no se definen para $a = 0$ o para $b = 0$.

103

Atención.

$3(x^2y^3)^{-1} = \square$

para $\square$

Tomar nota de la diferencia entre

$3(x^2y^3)^{-1}$ y

$(3x^2y^3)^{-1}$

$3x^{-2}y^{-3} = \dfrac{3}{x^2y^3}$

$x \neq 0 \vee y \neq 0$

104

$a(x^{-2}y^3)^{-2} = \square$

para $\square$

$ax^4y^{-6} = \dfrac{ax^4}{y^6}$

$x \neq 0 \vee y \neq 0$

1.13.1.4

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

105

Resumen para a, b $\in \mathbb{R}$,
m, n $\in \mathbb{Z}$ y para los casos en que el **valor** de las expresiones **esté definido** en $\mathbb{R}$.

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $(ab)^n = a^n b^n$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $a^m / a^n = a^{m-n}$
5. $(a/b)^n = a^n / b^n$
6. $a^0 = 1 \quad a \neq 0$
7. $a^{-n} = 1/a^n$

1.13.1.5

Práctica adicional (miscelánea),
si
se considera necesario.

1.13.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *aplicar* las siguientes propiedades de las expresiones exponenciales:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$(ab)^n = a^n b^n$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$
$$a^m/a^n = a^{m-n}$$
$$(a/b)^n = a^n/b^n$$
$$a^0 = 1 \quad a \neq 0$$
$$a^{-n} = 1/a^n$$

para a, b $\in \mathcal{R}$, m, n $\in \mathbb{Z}$ y para aquellos casos en que todas las expresiones involucradas estén definidas en $\mathcal{R}$.

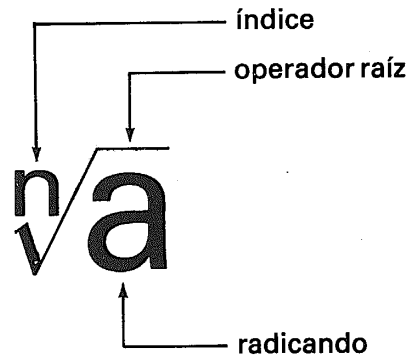
13.2

Radicación par e impar de los números reales

106

A una expresión de esta forma le llamamos

radical.



107

Comenzaremos por definir:

$$\sqrt[n]{a} = b$$

siendo

$$b^n = a$$

$$n \in \mathbb{Z}^+$$

108

Así:

$$\sqrt[1]{a} = b$$

si

$$b^1 = b = a$$

Por lo tanto:

$$\sqrt[1]{a} = a$$

Expresión no usual

109

Supongamos que en

$$\sqrt[n]{a}$$

el índice n
es impar.

110

$$\sqrt[3]{8} = \square$$

puesto que

$$\square$$

2

$2^3 = 8$

111

$\sqrt[5]{32} =$ ____

puesto que

____

2

$2^5 = 32$

112

$\sqrt[3]{-27} =$ ____

puesto que

____

-3

$(-3)^3 = -27$

113

$\sqrt[3]{-64} =$ ____

puesto que

____

-4

$(-4)^3 = -64$

114

$\sqrt[7]{0} =$ ____

ya que

_____

0

$0^7 = 0$

115

Hemos aceptado
al radical

$\sqrt[3]{5}$

como un número irracional que llamamos
la **raíz cúbica de cinco,**
verificándose que:

$\left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 5$

116

aproximadamente igual a

$\sqrt[3]{5} \doteq 1.70997595$

puesto que

$(1.70997595)^3 = 5.00000003 \doteq 5$

117

Ahora,
consideremos que
el índice n
es par.

118

se acostumbra eliminar el índice 2

$\sqrt[2]{4} = \sqrt{4} =$ ____

ya que

____

- 2
- $2^2 = 4$

Pero también:

-2

puesto que

$(-2)^2 = (-2)(-2) = 4$

119

$\sqrt{9} =$ ____

ya que

____

3 ó -3

$3^2 = 9$
$(-3)^2 = 9$

120

$\sqrt[4]{16} =$ [ ]

ya que

[ ]

2 ó − 2

$(2)^4 = 16$
$(-2)^4 = 16$

121

Mucha atención.

Para evitar la ambigüedad en el resultado, definiremos

$\sqrt[n]{a} = |b|$ tal que $b^n = a$

valor absoluto de b

para $n \in \mathbb{Z}^+$ y n par.

122

De acuerdo con la definición:

$\sqrt{4} =$ [ ] $=$ [ ]

puesto que

[ ]

$|2| = |-2| = 2$

$2^2 = 4$
$(-2)^2 = 4$

123

$\sqrt{25} = \square = \square$

puesto que

$\square$

$|5| = |-5| = 5$

$5^2 = 25$
$(-5)^2 = 25$

124

$\sqrt[4]{16} = \square = \square$

ya que

$\square$

$|2| = |-2| = 2$

$2^4 = 16$
$(-2)^4 = 16$

125

No debemos olvidar, entonces, que el símbolo

$\sqrt[n]{a}$

representa únicamente la **raíz n-ésima no negativa*** cuando n es par.
La **raíz negativa** la representaremos así:

$-\sqrt[n]{a}$

* A veces llamada raíz n-ésima principal.

126

El símbolo

$$\pm \sqrt[n]{a}$$

representará las dos raíces n-ésimas de a cuando n es par.

127

Atención.

$\sqrt{-4} =$ [ ]

ya que

[ ]

- resultado no definido
- **no** existe ningún número real x, tal que

  $x^2 = -4$

  Por ejemplo:
  $2 \times 2 = 4$
  $(-2)(-2) = 4$

128

$\sqrt[4]{-16} =$ [ ]

ya que

[ ]

- resultado no definido
- **no** existe ningún número real x, tal que

  $x^4 = -16$

  $2^4 = 16$
  $(-2)^4 = 16$

129

Vemos que:

$$\sqrt[n]{a}$$

no está definido
para

$$n \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } n \text{ es par}$$

y

$$a \in \mathbb{R}^-$$

130

Cuadro resumen de la raíz n-ésima de $a \in \mathbb{R}$.

	$a > 0$ $\oplus$	$a = 0$	$a < 0$ $\ominus$
n impar	Existe **una** raíz **positiva.** Ejemplo: $\sqrt[3]{8} = 2$	Existe **una** raíz igual a **cero.** Ejemplo: $\sqrt[5]{0} = 0$	Existe **una** raíz **negativa.** Ejemplo: $\sqrt[3]{-8} = -2$
n par	Existen **dos raíces,** una positiva y una negativa. Ejemplo: $\sqrt{4} = 2$ $-\sqrt{4} = -2$	Existe una raíz igual a cero. Ejemplo: $\sqrt[4]{0} = 0$	**No** existe raíz en $\mathbb{R}$.

131

El símbolo

$$\sqrt[n]{a}$$

1. Representará la raíz n-ésima única de a cuando n es impar y $a \in \mathbb{R}$.
2. Representará la raíz n-ésima principal (no negativa) de a cuando n es par y $a \in \mathbb{R}$ y $a > 0$.
3. No tendrá sentido en $\mathbb{R}$, cuando n es par y $a \in \mathbb{R}$ y $a < 0$.

132

El símbolo

$$-\sqrt[n]{a}$$

representará la raíz n-ésima negativa, cuando n es par y $a \in \mathbb{R}$ y $a > 0$.

133

El símbolo

$$\pm \sqrt[n]{a}$$

representará las dos raíces n-ésimas de a, cuando n es par y $a \in \mathbb{R}$ y $a > 0$.

134

Ejercicios de radicación de índice impar

135

$\sqrt[3]{1000} =$ ____

ya que

____

10

$10^3 = 1000$

136

$\sqrt[3]{-1000} =$ ____

ya que

____

-10

$(-10)^3 = -1000$

137

$\sqrt[3]{a^3} =$ ____

a

(véase cuadro siguiente)

138

$$\sqrt[3]{a^3} = a$$

Si, por ejemplo, $a = 2$:

$$\sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Si, por ejemplo, $a = -2$:

$$\sqrt[3]{(-2)^3} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

139

$\sqrt[3]{a^6} =$ ____

ya que

____

a^2

$(a^2)^3 = a^6$

140

$\sqrt[3]{x^9} =$ ____

ya que

____

x^3

$(x^3)^3 = x^9$

141

$\sqrt[3]{8n^{12}} =$ ____

ya que

____

$2n^4$

$(2n^4)^3 = 8n^{12}$

142

$\sqrt[3]{-m^6} =$ ____

ya que

____

$-m^2$

$(-m^2)^3 = -m^6$

143

$\sqrt[5]{32x^{10}} =$ ____

ya que

____

$2x^2$

$(2x^2)^5 = 32x^{10}$

144

$\sqrt[7]{-a^{14}b^7} = \square$

ya que

$\square$

$-a^2b$

$(-a^2b)^7 = -a^{14}b^7$

1.13.2.1

Práctica adicional de $\sqrt[n]{ax^m y^p z^r \ldots}$ si se considera necesario.

en donde:

$\sqrt[n]{a} \in \mathbb{Z}$ y n es impar
m, p, r ... son divisibles por n

145

Observemos esto con atención:

$$\sqrt[3]{a^4} = \sqrt[3]{a^3 \cdot a} = a\sqrt[3]{a}$$

146

$\sqrt[3]{a^5} = \square = \square$

$\sqrt[3]{a^3 \cdot a^2} = a\sqrt[3]{a^2}$

147

$\sqrt[3]{x^7} = \square = \square$

$\sqrt[3]{x^6 \cdot x} = x^2\sqrt[3]{x}$

148

$\sqrt[3]{5m^4} = \square = \square$

$\sqrt[3]{5m^3 \cdot m} = m\sqrt[3]{5m}$

149

$\sqrt[5]{7x^7 y^9} = \square$

$\sqrt[5]{7x^5 \cdot x^2 \cdot y^5 \cdot y^4}$

$= xy \sqrt[5]{7x^2 y^4}$

150

$\sqrt[7]{3a^{14} b^8 c^{10}} = \square$

$\sqrt[7]{3a^{14} \cdot b^7 \cdot b \cdot c^7 \cdot c^3}$

$= a^2 bc \sqrt[7]{3bc^3}$

151

$\sqrt[3]{-5x^4} = \square$

$\sqrt[3]{-5x^3 \cdot x}$

$= -x \sqrt[3]{5x}$

152

$\sqrt[3]{-8a^7} =$ [ ]

$\sqrt[3]{-8a^6 \cdot a}$

$= -2a^2 \sqrt[3]{a}$

1.13.2.2

Práctica adicional de $\sqrt[n]{ax^m y^r z^s \ldots}$ si se considera necesario.

en que:

$\sqrt[n]{a} \in \mathbb{Z}$ y n es impar
y
m, r, s ... son o no divisibles por n;
pero $m > n$, $r > n$, $s > n$,
etcétera.

153

Ejercicios de radicación de índice par

154

Atención.

$\sqrt{100} =$ ⌊____⌋

ya que

⌊_____⌋

$|10| = |-10| = 10$

raíz cuadrada principal de 100

$10^2 = 100$

155

$-\sqrt{100} =$ ⌊_____⌋

$-|10| = -|-10| = -10$

raíz cuadrada negativa de 100

$(-10)^2 = 100$

156

$\pm\sqrt{100} =$ ⌊_____⌋

$\pm|10| = \pm|-10| = \pm 10$

las dos raíces cuadradas de 100

$(10)^2 = 100$

$(-10)^2 = 100$

157

$\sqrt{a^2} = \square$

$|a|$

(véase cuadro siguiente)

158

$\sqrt{a^2} = |a|$

Si, por ejemplo, $a = 2$:

$\sqrt{2^2} = \sqrt{4} = |2| = |-2| = 2$

Si, por ejemplo, $a = -2$:

$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = |2| = |-2| = 2$

159

$\sqrt[4]{81} = \square$

$|3| = |-3| = 3$

$3^4 = 81$

160

$\sqrt[4]{-16} =$ ⌊_____⌋

resultado
no definido en $\mathbb{R}$

161

$-\sqrt[4]{16} =$ ⌊_____⌋

$-|2| = -|-2| = -2$

$(-2)^4 = 16$

162

$\pm\sqrt{a^2} =$ ⌊_____⌋

$\pm |a|$
que también puede escribirse así:

$\pm a$

163

$\sqrt{a^4} =$ ____

$|a^2|$

que también
puede escribirse: a^2,
puesto que
a^2 es siempre positivo

164

$\sqrt{m^6} =$ ____

$|m^3|$
que también puede
escribirse así:

$|m^2 \cdot m|$
$|m^2| \cdot |m|$
$m^2|m|$

165

$\sqrt[4]{m^8} =$ ____

$|m^2|$
también puede
escribirse m^2
puesto que, siendo
m^2 siempre positivo,
$|m^2| = m^2$

166

$\sqrt{9a^4} = \square$

$|3a^2| = |-3a^2|$
$= 3|a^2| = 3a^2$

167

$\sqrt{4a^6b^4} = \square$

$|2a^3b^2| = |-2a^3b^2|$
$= 2b^2|a^3| = 2b^2|a^2 \cdot a|$
$= 2b^2a^2 \cdot |a|$
$= 2a^2b^2|a|$

1.13.2.3

Práctica adicional de $\sqrt[n]{ax^m y^r z^s \ldots}$ si se considera necesario.

en que:

$\sqrt[n]{a} \in \mathbb{Z}$ y n es par
y
m, r, s ... son divisibles por n

168

$\sqrt{a^3} = \square$

$\sqrt{a^2 \cdot a} = |a| \sqrt{a}$

☞ $a \geqslant 0$

169

$\sqrt{a^5} = \square$

$\sqrt{a^4 \cdot a} = |a^2| \sqrt{a}$

$= a^2 \sqrt{a}$

$a \geqslant 0$

170

$\sqrt[4]{a^5 b^6} = \square$

$\sqrt[4]{a^4 \cdot a \cdot b^4 \cdot b^2}$

$= |ab| \sqrt[4]{ab^2}$

$a \geqslant 0$

1.13.2.4

Práctica adicional de $\sqrt[n]{ax^m y^r z^s \ldots}$ si se considera necesario.

{ para $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{Z}$ y n es par y m, r, s ... divisibles o no por n; $m \geqslant n$; $r \geqslant n$; $s \geqslant n$

1.13.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *definir* la raíz n-ésima de un número real, y de dar el significado de la expresión $\sqrt[n]{a}$ para:

  – n impar y $a \in \mathbb{R}$
  – n par, $a \in \mathbb{R}$ y $a \geqslant 0$
  – n par, $a \in \mathbb{R}$ y $a < 0$;

- *aplicar* las definiciones de raíz n-ésima de un número real para la simplificación de radicales.

13.3

Exponentes en $\mathbb{Q}$

171

Observar con atención.

$\sqrt[3]{a^3} = a$

$\sqrt[3]{a^6} = a^2$

$\sqrt[3]{x^9} = x^3$

$\sqrt[5]{x^{10}} = x^2$

$\sqrt{x^4} = x^2$

$\sqrt[4]{x^8} = x^2$

En general,
podemos concluir que:

$\sqrt[n]{x^m} = \underline{\quad}$

$x^{\frac{m}{n}}$

172

$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

En los ejemplos estudiados

$n, m \in \mathbb{Z}^+$,
y
m es divisible por n;
por lo tanto

$\frac{m}{n} \in \underline{\quad}$

$\mathbb{Z}^+$

173

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

pero si

$n, m \in \mathbb{Z}^+$

pudiendo m ser divisible o no por n,

$\frac{m}{n} \in$ [_____]

$\mathbb{Q}$ ó $\mathbb{Q}^+$

174

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

Esto nos permite escribir
una expresión exponencial
en forma de radical, o viceversa.
Por ejemplo:

$x^{\frac{5}{3}} =$ [____]

$\sqrt[3]{x^5}$

175

$x^{\frac{3}{4}} =$ [____]

$\sqrt[4]{x^3}$

176

$a^{\frac{2}{7}} = \square$

$\sqrt[7]{a^2}$

177

$m^{\frac{3}{2}} = \square$

$\sqrt{m^3}$

178

$a^{\frac{5}{2}} = \square$

$\sqrt{a^5}$

179

$a^{\frac{1}{2}} = \square$

$\sqrt{a}$

180

$b^{\frac{1}{3}} = \square$

$\sqrt[3]{b}$

181

$n^{\frac{1}{5}} = \square$

$\sqrt[5]{n}$

182

En general:

$$a^{\frac{1}{n}} = \square$$

$\sqrt[n]{a}$

183

Tomemos nota de esta importante regla de transformación:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$n \in \mathbb{Z}^+$

184

Expresar en forma exponencial los radicales siguientes:

$$\sqrt[4]{a^3} = \square$$

$a^{\frac{3}{4}}$

185

$\sqrt{a} = \square$

$a^{\frac{1}{2}}$

186

$\sqrt[3]{a} = \square$

$a^{\frac{1}{3}}$

187

Hemos estudiado para $a, b \in \mathbb{R}$; $m, n \in \mathbb{Z}$ y para todos los casos en que el valor de las expresiones esté definido:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $(ab)^n = a^n b^n$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $a^m / a^n = a^{m-n}$
5. $(a/b)^n = a^n / b^n$
6. $a^0 = 1 \qquad a \neq 0$
7. $a^{-n} \rightleftarrows 1/a^n$

En adelante, haremos extensivas estas reglas para $m,n \in \mathbb{Q}$.

188

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = \square$

$a^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}$

$a^{\frac{4}{2}}$

a^2

189

$x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{2}{5}} = \square$

Expresión radical → $\square$

$x^{\frac{3}{4}+\frac{2}{5}}$

$= x^{\frac{15+8}{20}}$

$= x^{\frac{23}{20}}$

$= \sqrt[20]{x^{23}}$

190

$n^{-\frac{2}{3}} \cdot n^{\frac{1}{4}} = \square$

Expresión radical → $\square$

$n^{-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}}$

$= n^{\frac{-8+3}{12}}$

$= n^{-\frac{5}{12}}$

$= \frac{1}{\sqrt[12]{n^5}}$

191

Expresión exponencial

$\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{a^5} =$ ⌊ ⌋

Expresión simplificada → ⌊ ⌋

Expresión radical → ⌊ ⌋

$a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{5}{2}}$

$a^{\frac{19}{6}}$

$\sqrt[6]{a^{19}}$

192

$\sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^5} =$ ⌊ ⌋

$x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{5}{3}}$

$x^{\frac{29}{12}}$

$\sqrt[12]{x^{29}}$

193

2. $(ab)^n = a^n b^n$

$(xy)^{\frac{5}{3}} =$ ⌊ ⌋

Expresión radical ⌊ ⌋

$x^{\frac{5}{3}} y^{\frac{5}{3}}$

$\sqrt[3]{x^5} \cdot \sqrt[3]{y^5}$

194

$(ab)^{\frac{1}{2}} = \square$

↓

Expresión radical $\square$

$a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

195

Completar:

$(ab)^{\frac{1}{n}} = \square$ ← Expresión radical

↓

Aplicando la regla $\square \rightarrow \square$ ← Resultado en forma de radical

por lo tanto:

$\sqrt[n]{ab} = \square$

$\sqrt[n]{ab}$

$a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{n}$

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

196

Otra importante regla de transformación:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

197

De acuerdo con lo que hemos encontrado:

$\sqrt{4 \cdot 9} =$ ⌊_____⌋

- $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$

En efecto:

$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$

$\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$

$6 = 6$

198

$\sqrt[3]{8 \cdot 27} =$ ⌊_____⌋

- $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27}$

En efecto:

$\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{216} = 6$

$\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6$

$6 = 6$

199

$\sqrt{400} = \sqrt{4 \cdot 100}$

$=$ ⌊_____⌋

↓

$=$ ⌊_____⌋

$\sqrt{4} \cdot \sqrt{100}$

$2 \cdot 10$

20

200

$\sqrt{a^3 b^5} = \square$

$\sqrt{a^3} \cdot \sqrt{b^5}$

201

$\sqrt{xyz^3} = \square$

$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} \cdot \sqrt{z^3}$

202

Inversamente:

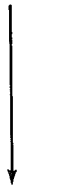
$\sqrt[3]{m} \cdot \sqrt[3]{n} = \square$

$\sqrt[3]{mn}$

203

3. $(a^m)^n = a^{mn}$

$\left(r^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{5}} =$ ____



Expresión radical ____

$r^{\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}}$

$r^{\frac{6}{20}}$

$r^{\frac{3}{10}}$

$\sqrt[10]{r^3}$

204

$\left(n^{\frac{3}{2}}\right)^{-2} =$ ____

____

$n^{\frac{3}{2}(-2)}$

n^{-3}

$\frac{1}{n^3}$

205

$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} =$ ____

____

$a^{\frac{1}{6}}$

$\sqrt[6]{a}$

206

$\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = \square$

$\downarrow$

$\square$

$x^{\frac{1}{12}}$

$\sqrt[12]{x}$

207

$\left(m^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = \square$

$\downarrow$

$\square$

$m^{\frac{1}{15}}$

$\sqrt[15]{m}$

208

Atención.

$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$

$\downarrow$

$a^{\frac{1}{nm}} = \sqrt[nm]{a}$

Por lo tanto:

$\square = \square$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

209

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

Por ejemplo:

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}} = \underline{\quad\quad}$$

$\sqrt[12]{x}$

210

$$\sqrt{\sqrt[3]{n}} = \underline{\quad\quad}$$

$\sqrt[6]{n}$

211

$$\sqrt[5]{\sqrt{\sqrt[3]{b}}} = \underline{\quad\quad}$$

$\sqrt[30]{b}$

212

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{a^3}}}} = \square$$

☞ Observar con atención:

A la expresión

$\sqrt[48]{a^3}$

la podemos simplificar así:

$\sqrt[16]{a}$

puesto que

$\sqrt[48]{a^3} = a^{\frac{3}{48}} = a^{\frac{1}{16}}$

213

4. $a^m / a^n = a^{m-n}$ $\quad a \neq 0$

$$\frac{a^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{2}{3}}} = \square$$

Expresión radical $\square$

$a^{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}$

$= a^{\frac{2}{15}}$

$= \sqrt[15]{a^2}$

214

$$\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}} = \square$$

$a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}$

$= a^{-\frac{1}{6}}$

$= \frac{1}{\sqrt[6]{a}}$

215

$$\frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt{x}} = \square$$ ← Expresión exponencial equivalente

$\square$

$\square$ ← Expresión radical

$$\frac{x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$x^{\frac{5}{6}}$$

$$\sqrt[6]{x^5}$$

216

5. $(a/b)^n = a^n/b^n$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = \square$$

Expresión radical $\square$

$$\frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{b^2}}$$

217

$$\sqrt[5]{\frac{x}{y}} = \square$$ ← Expresión exponencial equivalente

$\square$

$\square$ ← Expresión radical

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$\frac{x^{\frac{1}{5}}}{y^{\frac{1}{5}}}$$

$$\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{y}}$$

218

$$\sqrt{\frac{m}{n}} = \square$$ ← Expresión exponencial equivalente

$$\square$$

$$\square$$

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{m^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$$

219

En general:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \square$$ ← Expresión radical

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

220

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Por ejemplo:

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \square$$

$$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$$

221

$$\sqrt[3]{\frac{m}{n}} = \square$$

$$\frac{\sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{n}}$$

222

6. $a^{-n} = 1/a^n$

$$a^{-\frac{3}{4}} = \square = \square$$

Expresión radical

$$\frac{1}{a^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$$

223

$$a^{-\frac{1}{2}} = \square = \square$$

Expresión radical

$$\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

224

$$x^{-\frac{4}{3}} = \boxed{\quad} = \boxed{\quad}$$

$$\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$$

225

En general:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \boxed{\quad} \leftarrow \text{Expresión radical}$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

226

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

Por ejemplo:

$$x^{-\frac{1}{2}} = \boxed{\quad}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}$$

227

Atención.

$ax^{-\frac{6}{5}} = \square$

$$\frac{a}{\sqrt[5]{x^6}}$$

228

$3a^{-\frac{2}{3}} = \square$

$$\frac{3}{\sqrt[3]{a^2}}$$

229

$(3a)^{-\frac{2}{3}} = \square$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(3a)^2}}$$

230

Tomar nota de la diferencia entre

$$3a^{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{\sqrt[3]{a^2}}$$

y

$$(3a)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(3a)^2}}$$

231

$7x^{-\frac{1}{2}} =$ [ ]

$(4x)^{-\frac{1}{2}} =$ [ ]

$\frac{7}{\sqrt{x}}$

$\frac{1}{\sqrt{4x}}$

1.13.3.1

Práctica adicional de cada uno
de los casos estudiados,
si
se considera necesario.

1.13.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *escribir* en forma exponencial una expresión radical dada, o viceversa;
- *aplicar* las siguientes reglas para la transformación de expresiones exponenciales:

$$\left.\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= a^{m+n} \\ (ab)^n &= a^n b^n \\ (a^m)^n &= a^{mn} \\ a^m / a^n &= a^{m-n} \\ (a/b)^n &= a^n / b^n \\ a^{-n} &= 1/a^n \end{aligned}\right\} \; m, n \in \mathbb{Q}$$

- *aplicar* en ejercicios sencillos las siguientes reglas para el manejo de radicales:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

13.4

Operaciones con radicales

232

Hemos obtenido las siguientes reglas para el manejo de radicales con a, b $\in \mathcal{R}$, m. n $\in \mathbb{Z}^+$ y para los casos en que las expresiones estén definidas:

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
2. $\sqrt[n]{a/b} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
3. $a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

233

Simplificación de radicales

234

Estudiar con atención este ejemplo de simplificación de un radical:

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = \underbrace{2\sqrt{3}}$$

Expresión radical simplificada

De modo similar:

$\sqrt{18} =$ ____

$\sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

235

$\sqrt[3]{16} =$ ____

$\sqrt[3]{8 \cdot 2} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$

236

$\sqrt{48} =$ ____

$\sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

237

$\sqrt{50a^2} =$ ＿＿＿＿＿＿

$\sqrt{25 \cdot 2 \cdot a^2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2}$

$= 5|a|\sqrt{2}$

238

$\sqrt{16x^3y^4} =$ ＿＿＿＿＿＿

$\sqrt{16 \cdot x^2 \cdot x \cdot y^4}$

$= \sqrt{16} \cdot \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{y^4}$

$= 4|x|y^2\sqrt{x}$

239

$\sqrt{44a^3b^7} =$ ＿＿＿＿＿＿

$\sqrt{4 \cdot 11 \cdot a^2 \cdot a \cdot b^6 \cdot b}$

$= \sqrt{4}\sqrt{11}\sqrt{a^2}\sqrt{a}\sqrt{b^6} \cdot \sqrt{b}$

$= 2|ab^3|\sqrt{11ab}$

$= 2|ab|b^2\sqrt{11\,ab}$

240

$\sqrt{81a^4b} =$ ____

$9a^2\sqrt{b}$

241

$\sqrt[4]{4a^2} = \sqrt[4]{2^2 \cdot a^2} = 2^{\frac{2}{4}} \cdot a^{\frac{2}{4}}$

$= 2^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = (2a)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2a}$

242

De manera similar:

$\sqrt[4]{9} =$ ____

$\sqrt[4]{3^2} = 3^{\frac{2}{4}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

243

$\sqrt[6]{4} =$ ____

$\sqrt[6]{2^2} = 2^{\frac{2}{6}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

244

$\sqrt[4]{25a^2b^2} =$ ____

$\sqrt[4]{5^2a^2b^2} = \sqrt{5ab}$

245

$\sqrt[8]{81x^4y^8} =$ ____

$\sqrt[8]{3^4x^4y^8} = |y|\sqrt{3x}$

1.13.4.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

246

Introducción de un factor en un radical

247

Observar con atención.

$$2\sqrt{a} = \sqrt{2^2 \cdot a} = \sqrt{4a}$$

pues sabemos que:

$$\sqrt{4a} = 2\sqrt{a}$$

248

$a\sqrt{x} = \square$

$\sqrt{a^2 x}$

249

$3b\sqrt{n^3} = \square$

$\sqrt{9b^2 n^3}$

250

$a^2 \sqrt[3]{x^4} = \square$

$\sqrt[3]{a^6 x^4}$

1.13.4.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

251

Suma de radicales

252

$3\sqrt{2}$ y $5\sqrt{2}$

Éstos son radicales semejantes
porque tienen índices y
radicandos iguales.

253

$\sqrt[3]{a}$ y $5\sqrt[3]{a}$

¿Son radicales semejantes?

Sí/No

Sí

254

$\sqrt{ax^3}$ y $\sqrt{ax^2}$

¿Son radicales semejantes?

Sí/No

No

255

$\sqrt[5]{ab^2}$ y $\sqrt[3]{ab^2}$

¿Son radicales semejantes?

Sí/No

No

256

$7\sqrt{a^3}$ y $-15\sqrt{a^3}$.

¿Son radicales semejantes?

Sí/No

Sí

257

$\sqrt{12}$ y $\sqrt{18}$

¿Son radicales semejantes?

Sí/No

No

258

Por la propiedad **distributiva** de la multiplicación con respecto a la suma:

$2\sqrt{a} + 3\sqrt{a} =$ [ ]

$(2 + 3)\sqrt{a} = 5\sqrt{a}$

259

$10\sqrt{ax^3} + 7\sqrt{ax^3} = \_\_\_\_\_$

$17\sqrt{ax^3}$

260

$15\sqrt{ab} - 7\sqrt{ab} = \_\_\_\_\_$

$8\sqrt{ab}$

261

$30\sqrt[3]{x^4} - 18\sqrt[3]{x^2} = \_\_\_\_\_$

$12\sqrt[3]{x^2}$

262

$3\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = \square$

$5\sqrt{2}$

263

$3\sqrt{a} + 2\sqrt{b} = \square$

No puede expresarse el resultado como un solo término;
No son radicales semejantes.

264

$\sqrt[3]{x} - \sqrt{x} = \square$

No puede expresarse el resultado como un solo término;
No son radicales semejantes.

265

$\sqrt{3} + \sqrt{2} =$ [ ]

No puede expresarse el resultado como un solo término; **No** son radicales semejantes.

266

Tomar muy en cuenta que:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a + b}$$

Por ejemplo:

$$\sqrt{4} + \sqrt{9} \neq \sqrt{13}$$

$$2 + 3 \neq \sqrt{13}$$

$$5 \neq \sqrt{13}$$

267

Para simplificar una expresión como ésta:

$$\sqrt{45} + \sqrt{27} - \sqrt{20}$$

puede intentarse la simplificación de los radicales para que resulten semejantes, en la siguiente forma:

$$\sqrt{9 \times 5} + \sqrt{9 \times 3} - \sqrt{4 \times 5}$$

$3\sqrt{5} + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{5} =$ [ ]

$\sqrt{5} + 3\sqrt{3}$

268

$\sqrt{12} + \sqrt{27} =$ ＿＿＿＿

↓

＿＿＿＿

$\sqrt{4 \times 3} + \sqrt{9 \times 3}$

$= 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$

$= 5\sqrt{3}$

269

$\sqrt{18} - \sqrt{50} =$ ＿＿＿＿

↓

＿＿＿＿

$\sqrt{9 \times 2} - \sqrt{25 \times 2}$

$= 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$

$= -2\sqrt{2}$

270

$\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{16} =$ ＿＿＿＿

↓

＿＿＿＿

$\sqrt[3]{27 \times 2} + \sqrt[3]{8 \times 3} - \sqrt[3]{8 \times 2}$

$= 3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{2}$

$= \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{3}$

1.13.4.3

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

271

Producto de radicales y expresiones con radicales

272

Recordemos que:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

273

Así:

$\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} =$ ____

• $\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{36} = 6$

En efecto:

$\sqrt{4} = 2$

$\sqrt{9} = 3$

$\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 6$

274

$3\sqrt{21} \cdot 2\sqrt{3} =$ ____

$3 \cdot 2 \cdot \sqrt{21} \cdot \sqrt{3}$

$= 6\sqrt{21 \times 3}$

$= 6\sqrt{63}$

$= 6\sqrt{9 \times 7}$

$= 6 \cdot 3\sqrt{7}$

• $18\sqrt{7}$

275

$4\sqrt{12} \cdot \sqrt{75} =$ ____

$4\sqrt{12 \times 75}$

$= 4\sqrt{900}$

$= 4 \times 30$

• 120

276

$\sqrt{9x^2} \cdot \sqrt{4x^2} = \square$

$\sqrt{36x^4} = 6x^2$

277

Se requiere multiplicar:

$3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

por

$\sqrt{2}$

Véase cuadro siguiente.

278

Utilizamos la propiedad **distributiva** de la multiplicación con respecto a la suma.

$(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})\sqrt{2} = \square$

$3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$

$= 3 \cdot 2 - 2\sqrt{6}$

$= 6 - 2\sqrt{6}$

279

$(5\sqrt{3} + 3\sqrt{2})\ \sqrt{3} =$ ____

$5\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} + 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$

$= 5 \cdot 3 + 3\sqrt{6}$

$= 15 + 3\sqrt{6}$

280

$(\sqrt{a} + 3\sqrt{b})\sqrt{b} =$ ____

$a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} + 3\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}$

$= \sqrt{ab} + 3b$

1.13.4.4

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

281

Ahora,
necesitamos multiplicar:

$$(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})(\sqrt{2} - 5) = \square$$

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$$\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} - 5$$

$$\sqrt{6} + 4 \qquad - 5\sqrt{3} - 10\sqrt{2}$$

$$\sqrt{6} + 4 - 5\sqrt{3} - 10\sqrt{2}$$

282

$$(3\sqrt{7} - 2\sqrt{3})(5\sqrt{3} + 4\sqrt{7})$$

$$= \square$$

$$3\sqrt{7} - 2\sqrt{3}$$

$$5\sqrt{3} + 4\sqrt{7}$$

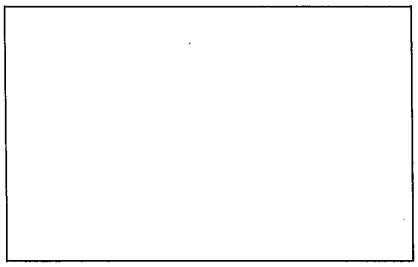
$$15\sqrt{21} - 30 \qquad + 84 - 8\sqrt{21}$$

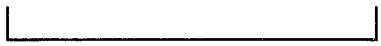
$$15\sqrt{21} + 54 - 8\sqrt{21}$$

$$7\sqrt{21} + 54$$

283

$(7\sqrt{5} + 5\sqrt{7})(5\sqrt{5} - 4\sqrt{7})$





$=$

$$\begin{array}{r} 7\sqrt{5} + 5\sqrt{7} \\ 5\sqrt{5} - 4\sqrt{7} \\ \hline 175 + 25\sqrt{35} \\ - 28\sqrt{35} - 140 \\ \hline 175 - 3\sqrt{35} - 140 \end{array}$$

$35 - 3\sqrt{35}$

1.13.4.5

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

284

Se requiere multiplicar

$\sqrt{x}$ por $\sqrt[3]{x^2}$

Véase cuadro siguiente.

285

$\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} = \square$

Expresión exponencial equivalente

$x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}}$

286

$\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}}$

"Reduciendo" los exponentes a un común denominador, tenemos que:

$= \square$

$x^{\frac{3}{6}} \cdot x^{\frac{4}{6}}$

287

$\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}}$

$= x^{\frac{3}{6}} \cdot x^{\frac{4}{6}}$

Expresando el resultado con radicales:

$= \square$

$\sqrt[6]{x^3} \cdot \sqrt[6]{x^4}$

los radicales han quedado **"reducidos" a un común índice.**

288

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}}$$

$$= x^{\frac{3}{6}} \cdot x^{\frac{4}{6}}$$

$$= \sqrt[6]{x^3} \cdot \sqrt[6]{x^4}$$

Simplificando, de acuerdo con la regla $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$:

$$= \boxed{\qquad\qquad}$$

$\sqrt[6]{x^3 \cdot x^4}$

289

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}}$$

$$= x^{\frac{3}{6}} \cdot x^{\frac{4}{6}}$$

$$= \sqrt[6]{x^3} \cdot \sqrt[6]{x^4}$$

$$= \sqrt[6]{x^3 \cdot x^4}$$

Simplificando el radicando, de acuerdo con la regla $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$:

$$= \boxed{\qquad\qquad}$$

$\sqrt[6]{x^7}$

290

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}}$$

$$= x^{\frac{3}{6}} \cdot x^{\frac{4}{6}}$$

$$= \sqrt[6]{x^3} \cdot \sqrt[6]{x^4}$$

$$= \sqrt[6]{x^3 \cdot x^4}$$

$$= \sqrt[6]{x^7}$$

Simplificando el radical resultante:

$$= \boxed{\qquad\qquad}$$

$|x| \sqrt[6]{x}$

291

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}}$$

$$= x^{\frac{3}{6}} \cdot x^{\frac{4}{6}}$$

$$= \sqrt[6]{x^3} \cdot \sqrt[6]{x^4}$$

$$= \sqrt[6]{x^3 \cdot x^4}$$

$$= \sqrt[6]{x^7}$$

$$= |x| \sqrt[6]{x}$$

Para $x \geqslant 0$

292

$$\sqrt[4]{ab} \cdot \sqrt[3]{a^2} = \square$$

$$\sqrt[4]{ab} \cdot \sqrt[3]{a^2}$$

$$= (ab)^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{2}{3}}$$

$$= (ab)^{\frac{3}{12}} \cdot a^{\frac{8}{12}}$$

$$= \sqrt[12]{(ab)^3} \cdot \sqrt[12]{a^8}$$

$$= \sqrt[12]{(ab)^3 \cdot a^8}$$

$$= \sqrt[12]{a^{11} b^3}$$

293

$$\sqrt{4x} \cdot \sqrt[5]{2x^2} = \square$$

$$\sqrt{4x} \cdot \sqrt[5]{2x^2}$$

$$= (4x)^{\frac{1}{2}} \cdot (2x^2)^{\frac{1}{5}}$$

$$= (4x)^{\frac{5}{10}} \cdot (2x^2)^{\frac{2}{10}}$$

$$= \sqrt[10]{(4x)^5} \cdot \sqrt[10]{(2x^2)^2}$$

$$= \sqrt[10]{(4x)^5 \cdot (2x^2)^2}$$

$$= \sqrt[10]{4^5 \cdot 2^2 \cdot x^6 \cdot x^4}$$

$$= \sqrt[10]{2^{10} \cdot 2^2 \cdot x^9}$$

$$= 2 \sqrt[10]{4x^9}$$

1.13.4.6

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

294

Cociente de radicales

295

Recordemos que:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

296

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \square = \square$$

$$\sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2}$$

297

$$\frac{2\sqrt{3a}}{10\sqrt{a}} = \square$$

$$\frac{2}{10}\sqrt{\frac{3a}{a}}$$

$$= \frac{2}{10}\sqrt{3}$$

$$\bullet = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

298

$$\frac{4\sqrt{ab}}{2\sqrt{a^2}} = \square$$

$$\frac{4}{2}\sqrt{\frac{ab}{a^2}}$$

$$\bullet = 2\sqrt{\frac{b}{a}}$$

1.13.4.7

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

299

Atención.

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = \square$$

$$\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{2^{\frac{3}{6}}}{2^{\frac{2}{6}}} = \sqrt[6]{\frac{2^3}{2^2}}$$

$$= \frac{\sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{2^2}} = \sqrt[6]{2}$$

300

$$\frac{\sqrt{ax}}{\sqrt[3]{bx^2}} = \square$$

$$\frac{(ax)^{\frac{1}{2}}}{(bx^2)^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[6]{\frac{(ax)^3}{(bx^2)^2}}$$

$$= \frac{(ax)^{\frac{3}{6}}}{(bx^2)^{\frac{2}{6}}} = \sqrt[6]{\frac{a^3x^3}{b^2x^4}}$$

$$= \frac{\sqrt[6]{(ax)^3}}{\sqrt[6]{(bx^2)^2}} = \sqrt[6]{\frac{a^3}{b^2x}}$$

1.13.4.8

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

301

Potenciación y radicación de radicales

302

Recordemos que:

$(a^n)^m = \square$

a^{nm}

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \square$

$\sqrt[nm]{a}$

303

Atención.

índice impar

$\left(\sqrt[3]{a}\right)^2 = \square$

$\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2$

$= a^{\frac{2}{3}}$

$= \sqrt[3]{a^2}$

304

Atención.

índice impar

$\left(\sqrt[5]{x}\right)^3 = \square$

$\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^3$

$= x^{\frac{3}{5}}$

$= \sqrt[5]{x^3}$

305

Vemos que, en general:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

para n impar.

306

Mucha atención.

La regla

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

no siempre se cumple para **n par.**

Por ejemplo:

para $a = -4$
y $n = 2$
y $m = 2$

$\underbrace{\left(\sqrt{-4}\right)^2}_{\text{expresión no definida en } \mathbb{R}} \neq \underbrace{\sqrt{(-4)^2}}_{\text{expresión equivalente a 4}}$

$\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4$

307

En general, las reglas estudiadas **se cumplen** sólo **si los símbolos involucrados están definidos en** $\mathbb{R}$.

Por ejemplo:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

no se cumple para

$n = 2$

$a < 0$ por ejemplo: $a = -4$

$b < 0$ por ejemplo: $b = -9$

$\underbrace{\sqrt{-4}}_{\text{expresiones no definidas en } \mathbb{R}} \cdot \underbrace{\sqrt{-9}}_{\text{expresiones no definidas en } \mathbb{R}} \neq \underbrace{\sqrt{(-4)(-9)}}_{\text{expresión equivalente a 6:}}$

$\sqrt{36} = 6$

308

$\sqrt[3]{\sqrt{64}} =$ _____

$\sqrt[6]{64} = 2$

1.13.4.9

Práctica adicional de potenciación
y radicación de radicales,
si
se considera necesario.

309

Racionalización

310

Consideremos esta expresión

$$\frac{2}{\sqrt{a}}$$

la cual queremos transformar
en una expresión equivalente,
pero sin radicales en el denominador.

Ver cuadro siguiente.

311

Estudiemos con atención este ejemplo de **racionalización del denominador:**

$$\frac{2}{\sqrt{a}} = \frac{2\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}} = \frac{2\sqrt{a}}{a}$$

312

Racionalizar el denominador:

$$\frac{1-x}{2\sqrt{x}} = \square$$

$$= \square$$

$$\frac{(1-x)\cdot\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}$$

$$= \frac{(1-x)\sqrt{x}}{2x}$$

313

Racionalizar el denominador:

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \square$$

$$= \square$$

$$\frac{3\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

314

Racionalizar el denominador:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \square$$

$$= \square$$

$$\frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}$$

315

Atención.

Ahora lo que necesitamos racionalizar es el numerador; por lo tanto:

$$\frac{3\sqrt{2}}{4} = \square$$

$$= \square$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3 \cdot 2}{4\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

316

En esta expresión, se requiere racionalizar el denominador:

$$\frac{5}{\sqrt[3]{3}} = \square$$

$$= \square$$

$$\frac{5}{\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{\overbrace{(\sqrt[3]{3})^2}}{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3}}$$

$$= \frac{5\sqrt[3]{9}}{3}$$

317

$$\frac{a}{\sqrt[4]{x}} = \square$$

$$= \square$$

$$\frac{a\,(\sqrt[4]{x})^3}{\sqrt[4]{x}\cdot(\sqrt[4]{x})^3}$$

$$= \frac{a\sqrt[4]{x^3}}{x}$$

318

Ahora,
queremos una expresión equivalente
a ésta, pero sin radicales en el denominador:

$$\frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

Véase cuadro siguiente.

319

binomio conjugado
del denominador

$$\frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{4 \quad \overline{(\sqrt{2}-\sqrt{3})}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}$$

Sabemos que:

$$(a + b)(a - b) = \square$$

$a^2 - b^2$

320

$$\frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{4(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}$$

Al hacer extensiva aquella regla para los números reales, tenemos:

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = \boxed{\qquad\qquad}$$

$2 - 3 = -1$

321

Entonces:

$$\frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{4(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}$$

$$= \boxed{\qquad\qquad}$$

$$\frac{4(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{-1}$$

$$= -4(\sqrt{2}-\sqrt{3})$$

322

Se requiere racionalizar el denominador de esta expresión:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \boxed{\qquad\qquad}$$

$$= \boxed{\qquad\qquad}$$

$$\frac{\sqrt{x}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$$

1.13.4.10

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

1.13.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *efectuar* las operaciones siguientes, con radicales y expresiones sencillas que contengan radicales:

  - simplificación
  - introducción de un factor en un radical
  - "reducción" de radicales semejantes
  - suma
  - multiplicación
  - división
  - potenciación
  - radicación
  - racionalización.

13.5

Exponentes en $\mathbb{R}$

323

Hemos aceptado para a, b $\in \mathbb{R}$ y m, n $\in \mathbb{Q}$
y para todos los casos en que las
expresiones están definidas en $\mathbb{R}$:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $(ab)^n = a^n b^n$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $a^m / a^n = a^{m-n}$
5. $(a/b)^n = a^n / b^n$
6. $a^0 = 1$
7. $a^{-n} = 1/a^n$

324

Ahora, nos preguntamos
si tales reglas
pueden ser aplicadas
para

$m, n \in \mathbb{R}$

es decir,
si podemos aceptar
exponentes irracionales,
y llegamos a la conclusión de que
no hay razón para no hacerlo.

325

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$x^{\sqrt{12}} \cdot x^{\sqrt{27}} =$ ☐

↓

$=$ ☐

$x^{\sqrt{12}+\sqrt{27}}$

$= x^{\sqrt{4\cdot 3}+\sqrt{9\cdot 3}}$

$= x^{2\sqrt{3}+3\sqrt{3}}$

$= x^{5\sqrt{3}}$

326

2. $(ab)^n = a^n b^n$

$(3a^2 b)^\pi =$ ☐

$3^\pi a^{2\pi} b^\pi$

327

3. $(a^m)^n = a^{mn}$

$\left(m^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt[3]{3}} =$ ☐

↓

$=$ ☐

$m^{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}}$

$= m^{2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{2}{6}}}$

$= m^{2^{\frac{3}{6}}\cdot 3^{\frac{2}{6}}}$

$= m^{\sqrt[6]{2^3\cdot 3^2}}$

$= m^{\sqrt[6]{72}}$

328

4. $a^m / a^n = a^{m-n}$

$$\frac{x^{\sqrt{3}}}{x^{\sqrt{2}}} = \square$$

$x^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

329

5. $(a/b)^n = a^n / b^n$

$$\left(\frac{3x}{4y}\right)^{3\sqrt{2}} = \square$$

$$= \square$$

$$\frac{(3x)^{3\sqrt{2}}}{(4y)^{3\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{3^{3\sqrt{2}}\, x^{3\sqrt{2}}}{4^{3\sqrt{2}}\, y^{3\sqrt{2}}}$$

330

7. $a^{-n} = 1/a^n$

$$a^{-\sqrt{x}} = \square$$

$$\frac{1}{a^{\sqrt{x}}}$$

1.13.5.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

1.13.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *aplicar* las siguientes reglas para la transformación de expresiones exponenciales:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$(ab)^n = a^n b^n$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$
$$a^m / a^n = a^{m-n}$$
$$(a/b)^n = a^n / b^n$$
$$a^{-n} = 1/a^n$$

$a, b \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{R}$.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 12 de abril de 1985,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO ET KC 100